1	2	3	4	5			Calificación
	B	B-	B	B	B	B	A

APELLIDO Y N

NRO. DE LIBRE

TURNO: MAÑANA

ÁLGEBRA LINEAL - 2do. cuatrimestre 2019
PRIMER PARCIAL (11/10/2019)

1. Sea $\mathbb{V} = \mathbb{Q}^{2\times 2}$. Consideremos los siguientes $\mathbb{Q}$-subespacios de $\mathbb{V}$:

$$U_1 = \{A \in \mathbb{V} : AE^{11} = E^{11}A\},\ U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$W_1 = \{A \in \mathbb{V} : \mathrm{tr}(A) = 0,\ A = A^t\},\ W_2 = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{V} : 2a_{11} + 2a_{12} - 3a_{21} + a_{22} = a_{11} - a_{12} - a_{21} - a_{22} = 0\}.$$

Hallar un isomorfismo lineal $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ tal que $f(U_1) = W_1$ y $f(U_2) = W_2$.

2. Sean $f_1, f_2, \dots, f_n$ en $\mathbb{R}_{n-1}[x]$. Probar que $\{f_1, \dots f_n\}$ es una base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial si y solo si la matriz

$$\begin{pmatrix} f_1(1) & f_1(2) & \dots & f_1(n) \\ f_2(1) & f_2(2) & \dots & f_2(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(1) & f_n(2) & \dots & f_n(n) \end{pmatrix}$$

es inversible en $\mathbb{R}^{n\times n}$.

3. Sean $\beta_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $\beta_2 = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ bases de un k-espacio vectorial $\mathbb{V}$ de dimensión 4. Se tiene que $\beta_1^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ y $\beta_2^* = \{\varphi_2 + 2\varphi_3, \varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3, \varphi_3 + \varphi_4, \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4\}$ son las bases duales de β_1 y β_2 respectivamente. Consideremos la transformación lineal $f : \mathbb{V} \to k^4$ definida por:

$$|f|_{\beta_2 E} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$k = \mathbb{Q}$

Hallar $|f^t|_{E^*\beta_1^*}$ y $\mathrm{Im}(f)^\circ$.

4. Dado $n \in \mathbb{N}$, sean $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. Se define

$$\Delta_n := \det \begin{pmatrix} a_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & a_{n-1} & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & a_n \end{pmatrix}.$$

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\Delta_n \neq 0$ y si $n \geq 2$,

$$a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_0}}}} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}.$$

5. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En cualquier caso, justificar.

(a) Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces existen $C, D \in GL(3, \mathbb{Q})$ tales que $A = CBD$.

(b) Sea $A \in k^{n\times n}$ una matriz de rango 1, donde k es un cuerpo. Entonces existen vectores columna no nulos $v, w \in k^n$ tales que $A = v \cdot w^t$.

(c) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \\ -2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$. Entonces existe $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\mathrm{adj}(B) = A$.

Ejercicio 1:

$\mathbb{W} = \mathbb{Q}^{2\times 2}$

$U_1 = \{ A \in \mathbb{W},\ A E^{11} = E^{11} A \}$

$U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$W_1 = \{ A \in \mathbb{W} : tr(A) = 0,\ A = A^t \}$

$W_2 = \{ A = (a_{ij}) \in \mathbb{W} : 2a_{11} + 2a_{12} - 3a_{21} + a_{22} = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = 0 \}$

Busco isomorfismo $f: \mathbb{W} \to \mathbb{W}$

tal que $f(U_1) = W_1 \quad f(U_2) = W_2$

Primero, busco $U_1 \cap U_2$

Sea $A \in U_2 \Rightarrow A = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 & -\alpha_1 + \alpha_2 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 & \alpha_1 + 2\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$A \in U_1 \iff \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 & -\alpha_1 + \alpha_2 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 & \alpha_1 + 2\alpha_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 & -\alpha_1 + \alpha_2 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 & \alpha_1 + 2\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 & 0 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 & -\alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \ \checkmark \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \quad \iff \quad \alpha_1 = \alpha_2 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \\ 0 = 0 \ \checkmark \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$U_1 \cap U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ahora, busco $W_1 \cap W_2$:

Busco generadores de W_1. Por el ej 1 de la práctica 2, sé que si $tr(A) = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix}$ Además $A = A^t \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & -a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_{11} = a_{11} \\ a_{21} = a_{12} \\ a_{12} = a_{21} \\ -a_{11} = a_{11} \end{cases} \Longleftrightarrow a_{12} = a_{21}$$

$$\overset{\shortparallel}{A^t}$$

$\Rightarrow$ Si $A \in W_1$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & -a_{11} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$(\dim W_1 = 2)$

Por otro lado $A \in W_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2a_{11} + 2a_{11} - 3a_{12} + (-a_{11}) = 0 \\ a_{11} - a_{12} + a_{12} - (-a_{11}) = 0 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} a_{11} - a_{12} = 0 \\ 2a_{11} - 2a_{12} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow a_{11} = a_{12}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{11} & -a_{11} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow W_1 \cap W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Ahora, tomando $\left\{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right\} \in U_1 \cap U_2$, extiendo a una base

de $U_1 + U_2$ que tenga una base de U_1 y una base de U_2

Dim $U_2 = 2$ porque sus 2 generadores son l.i., tomo $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

para formar $B_{U_2} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{l.i.}} \right\}$ base de U_2

Ahora busco base de U_1:

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad AE^{11} = E^{11}A \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{matrix} a_{11} = a_{11} \\ a_{12} = 0 \\ a_{21} = 0 \end{matrix}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\qquad$ Tomo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ para completar

B_{U_2} a la base $B_{U_1+U_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ de U_1+U_2

y la completo con $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{U_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

base de $\mathbb{Q}^{2\times 2}$

Chequeo que son l.i viendo que lo son sus coordenadas en la base canónica de $\mathbb{Q}^{2\times 2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes y confirmo que B es base de $\mathbb{Q}^{2\times 2}$

Ahora ~~...~~ busco otra base de $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ que tenga una base de W_1+W_2 del mismo modo que B.

Tomo $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in W_1$ y $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ base de W_1

son l.i

y W_1 tiene dim 2.

~~Por otro lado W_2 también tiene dim 2 pues lo deformaré... l.i y $\dim W_2$ ... $(\mathbb{Q}^{2\times2})$ ... "nec l.i"~~

Busco un vector de W_2 l.i con $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$A \in W_2$

$$\begin{cases} 2a_{11} + 2a_{12} - 3a_{21} + a_{22} = 0 \\ a_{11} - a_{12} - a_{21} - a_{22} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow a_{11} = a_{12} + a_{21} + a_{22}$

$2(a_{12} + a_{21} + a_{22}) + 2a_{12} - 3a_{21} + a_{22} =$

$2a_{12} + 2a_{21} + 2a_{22} + 2a_{12} - 3a_{21} + a_{22} = 4a_{12} - a_{21} + 3a_{22} = 0$

$a_{21} = 4a_{12} + 3a_{22}$

$a_{11} = a_{12} + 4a_{12} + 3a_{22} + a_{22}$

$= 5a_{12} + 4a_{22}$

$$A = \begin{pmatrix} 5a_{12} + 4a_{22} & a_{12} \\ 4a_{12} + 3a_{22} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{12} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

tomo $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ siendo que $\left\{ \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ es l.i.

Tomo $B_2 = \left\{ \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}^{W_1} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ Si son l.i. B_2 es base de de $\mathbb{Q}^{2\times 2}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}}_{W_2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

Ahora defino $f: W \to W$ en base B ~~tq~~ ~~sea~~ la única t.l. que cumple:

$$f\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- f cumple las condiciones pedidas pues $\mathrm{Im} f = \left\langle \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{Q}^{2\times 2}$ pues los generadores son base, entonces f es epi y como $f: \mathbb{Q}^{2\times 2} \to \mathbb{Q}^{2\times 2}$, f es además mono $\therefore$ f es iso.

Además como $U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$f(U_1) = \left\langle f\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{base de } W_1} \right\rangle = W_1$$

y como $U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ y $f(U_2) = \left\langle f\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle =$

$$= \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{base de } W_2} \right\rangle = W_2 \checkmark$$

Ejercicio 2:

$f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ Probar que $\{f_1, \dots, f_n\}$ es base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ como $\mathbb{R}$-ev si y solo si

$$A = \begin{pmatrix} f_1(1) & f_1(2) & \dots & f_1(n) \\ f_2(1) & f_2(2) & \dots & f_2(n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(1) & f_n(2) & \dots & f_n(n) \end{pmatrix} \text{ es inversible}$$

$\dim \mathbb{R}_{n-1}[x] = n$

$\{f_1, \dots, f_n\}$ es base $\Leftrightarrow$ es li pues son n polinomios de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$

$\Leftarrow$) ~~...~~ supongamos que $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ no es base $\Rightarrow$ es ld. Por lo tanto, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ (supongo $i=1$ sin perder generalidad) tal que

$f_1 = \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n$

$\Rightarrow f_1(1) = \alpha_2 f_2(1) + \dots + \alpha_n f_n(1)$

$f_1(2) = \alpha_2 f_2(2) + \dots + \alpha_n f_n(2)$

$\vdots$

$f_1(n) = \alpha_2 f_2(n) + \dots + \alpha_n f_n(n)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} f_2(1) & \dots & f_n(1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_2(n) & \dots & f_n(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(1) \\ \vdots \\ f_1(n) \end{pmatrix}$$

Por ejercicio 22 de la práctica 3

$$rg \begin{pmatrix} f_2(1) & \dots & f_n(1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_2(n) & \dots & f_n(n) \end{pmatrix} = rg \left(\begin{array}{ccc|c} f_2(1) & \dots & f_n(1) & f_1(1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_2(n) & \dots & f_n(n) & f_1(n) \end{array}\right)$$

$$= rg \underbrace{\begin{pmatrix} f_1(1) & f_2(1) & \dots & f_n(1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(n) & f_2(n) & & f_n(n) \end{pmatrix}}_{A^*} = rg\, A \qquad A = \begin{pmatrix} f_1(1) & & f_1(n) \\ \vdots & & \vdots \\ f_n(1) & & f_n(n) \end{pmatrix}$$

pues rg columnas y rg fila son iguales

pero $rg \begin{pmatrix} f_2(1) & \dots & f_n(1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_2(n) & \dots & f_n(n) \end{pmatrix} < n$ pues son $n-1$ filas

$\Rightarrow rg\, A < n-1 \therefore A$ no es inversible

$\Rightarrow$ Si A es inversible, $\{f_1, \dots, f_n\}$ es base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$

$\Rightarrow$) Supongamos que no es inversible $\Rightarrow rg A < n$. Entonces

$\exists\, i \in \{1, \dots, n\}$ (tomo nuevamente $i=1$) tq

$(f_1(1), f_1(2), \dots, f_1(n)) = \alpha_2 (f_2(1), f_2(2), \dots, f_2(n)) +$

$\dots + \alpha_n (f_n(1), f_n(2), \dots, f_n(n))$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1(1) = \alpha_2 f_2(1) + \dots + \alpha_n f_n(1) \\ f_1(2) = \alpha_2 f_2(2) + \dots + \alpha_n f_n(2) \\ \vdots \\ f_1(n) = \alpha_2 f_2(n) + \dots + \alpha_n f_n(n) \end{cases}$$

la función evaluación es lineal

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1(1) = (\alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \dots + \alpha_n f_n)(1) \\ f_1(2) = (\alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \dots + \alpha_n f_n)(2) \\ \vdots \\ f_1(n) = (\alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \dots + \alpha_n f_n)(n) \end{cases}$$

Por el ejercicio 15 de la práctica 4.

Si $B_1 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ donde $\varepsilon_i : \mathbb{R}_{n-1}[x] \to \mathbb{R}$ $\varepsilon_i = P(i)$

es base de $(\mathbb{R}_{n-1}[x])^*$, existe base $B = \{P_1, \dots, P_n\}$ de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$

tq $B^* = B_1$, entonces,

$\alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \dots + \alpha_n f_n = P$ tiene una única escritura

de la forma $\sum_{i=1}^{n} P(i) P_i$ $\Rightarrow$ si $\begin{cases} f_1(1) = P(1) \\ f_1(2) = P(2) \\ \vdots \\ f_1(n) = P(n) \end{cases}$ $\Rightarrow f_1 = P$ (*)

$\sum_{i=1}^{n} P(i) P_i = f_1(1)P_1 + f_1(2)P_2 + \dots + f_1(n)P_n = P(1)P_1 + P(2)P_2 + \dots + P(n)P_n$

(*) pues sus coordenadas en la base B son las mismas

$\Rightarrow \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ es ld y por lo tanto no es base

$\therefore$ para que $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ sea base debe ser A inversible.

Ej 3:

$\beta_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ $\beta_2 = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$

$\beta_1^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ $\beta_2^* = \{\underbrace{\varphi_2 + 2\varphi_3}_{\phi_1}, \underbrace{\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3}_{\phi_2}, \underbrace{\varphi_3 + \varphi_4}_{\phi_3}, \underbrace{\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4}_{\phi_4}\}$

$f: V \longrightarrow k^4$

$$|f|_{\beta_2 E} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Quiero $|f^t|_{E^* B_1^*}$ y $Im(f)^\circ$. Para hallar $|f^t|_{E^* B_1^*}$ utilizo cambio de base

$|f^t|_{E^* B_1^*} = (|f|_{B_1 E})^t$ (ej 16. práctica 4)

y $|f|_{B_1 E} = |f|_{B_2 E}\, C_{B_1 B_2}$, $C_{B_1 B_2} = (C_{B_2^* B_1^*})^t$

$$C_{B_2^* B_1^*} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (C_{B_2^* B_1^*})^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = C_{B_1 B_2}$$

$(\phi_1)_{B_1^*}$ $(\phi_2)_{B_1^*}$ $(\phi_3)_{B_1^*}$ $(\phi_4)_{B_1^*}$

$$|f|_{B_1 E} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & -6 & -1 \\ 3 & -3 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 14 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (|f|_{B_1 E})^t = \boxed{(|f^t|_{E^* B_1^*}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & 0 \\ 1 & -6 & 9 & 14 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}} \checkmark$$

Ahora busco $Im(f)^\circ$, que por ej 16 de la práctica 16

$Im(f)^\circ = Nu(f^t)$

sea $\phi \in Nu(f^t) \Rightarrow (\phi)_{E^*} = (a, b, c, d)$

y $|f^t|_{E^* B_1^*} (\phi)_{E^*} = (0)_{B_1^*} = (0)$

resuelvo el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & 0 \\ 1 & -6 & 9 & 14 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & 0 \\ 1 & -6 & 9 & 14 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & 0 \\ 1 & -6 & 9 & 14 \\ 0 & -6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & 0 \\ 1 & -6 & 9 & 14 \\ 0 & 0 & 15 & 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 15 & -28 \\ 1 & -6 & 9 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -6 & 9 & 14 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 15 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -6 & 9 & 14 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -42 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -6 & 9 & 14 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es SCD

$\Rightarrow$ la solución es la trivial

↳ … de rango 3

$\Rightarrow \mathrm{Im}(f)^{\circ} = \{0\}$

E/ 4

$$\Delta_n \; \det \overbrace{\begin{pmatrix} a_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & a_1 & & & \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & a_{n-1} & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & a_n \end{pmatrix}}^{n+1} \Big\} n+1$$

Quiero ver que $\Delta_n \neq 0$. Para eso veo que $\Delta_n > 0 \; \forall n$ y $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}$

Veo por inducción que $\Delta_n > 0$. El caso $\Delta_1 > 0$ se ve trivialmente. $\Delta_1 = a_0 a_1 + 1 > 0$

Veo casos base $n=2$, $n=3$

caso $n=1 \neq 0$

$n=2$

$$\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} a_0 & 1 & 0 \\ -1 & a_1 & 1 \\ 0 & -1 & a_2 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{última}\\ \text{fila}}}{=} (-1)(-1)^{2+3} \det\begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + a_2 \det\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ -1 & a_1 \end{pmatrix}$$

$$= a_0 + a_2(a_0 a_1 + 1) > 0 \checkmark \text{ porque } a_i \in \mathbb{N}$$

$n=3$

$$\Delta_3 = \det\begin{pmatrix} a_0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & a_1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a_2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & a_3 \end{pmatrix} = (-1)^{3+4}(-1) \det\begin{pmatrix} a_0 & 1 & 0 \\ -1 & a_1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + a_3 \Delta_2$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_0 & 1 & 0 \\ -1 & a_1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + a_3\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ -1 & a_1 \end{pmatrix} + a_3\Delta_2 = \Delta_1 + a_3 \Delta_2 > 0$$

Ahora que estudié algunos casos base hago el paso inductivo.

Supongamos que $\Delta_i > 0 \quad \forall i \leq n$

$$\underset{\in \mathbb{R}^{(n+2)\times(n+2)}}{\Delta_{n+1}} = \det\begin{pmatrix} a_0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & a_1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & a_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & a_{n-1} & 1 & 0 \\ \vdots & & & -1 & a_n & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & a_{n+1} \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{desarrollo}\\ \text{por última}\\ \text{fila}}}{=}$$

$$\cancel{= (-1)(-1)^{(n+1)+(n+2)} \cdot \det\begin{pmatrix} a_0 & 1 & \cdots & 0 \\ -1 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & a_{n-1} & 0 \\ \vdots & & -1 & 0 \\ 0 & & 0 & a_n \; 1 \end{pmatrix} + a_{n+1}\Delta_n}$$

$$= \underbrace{(-1)(-1)^{(n+1)+(n+2)}}_{=1} \det \begin{pmatrix} a_0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & a_1 & 1 & & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & -1 & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + a_{n+1}\Delta_n$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{última} \\ \text{columna}}}{=} 1 \det \begin{pmatrix} a_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & a_{n-1} \end{pmatrix} + a_{n+1}\Delta_n = \Delta_{n-1} + a_{n+1}\Delta_n = \Delta_{n+1} \quad (*)$$

Por hip inductiva $\Delta_{n-1} > 0$
$\Delta_n > 0$ $\Rightarrow \Delta_{n-1} + a_{n+1}\Delta_n > 0$
y $a_{n+1} \in \mathbb{N}$

$\forall n \ \Delta_n > 0 \Rightarrow \Delta_n \neq 0$. ✓

Ahora veo que si $n \geq 2$

$$a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_0}}}} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \quad \text{por inducción}$$

Caso base $n=2$ usando lo calculado antes,

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{a_0 + a_2(a_0 a_1 + 1)}{a_0 a_1 + 1} = \frac{a_0 + a_0 a_1 a_2 + a_2}{a_0 a_1 + 1} \quad = ✓$$

$$a_2 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_0}} = a_2 + \cfrac{1}{\frac{a_1 a_0 + 1}{a_0}} = a_2 + \frac{a_0}{a_1 a_0 + 1} = \frac{a_1 a_2 a_0 + a_2 + a_0}{a_1 a_0 + 1} = \frac{a_0 + a_0 a_1 a_2 + a_2}{a_0 a_1 + 1}$$

Paso inductivo. Si $\dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_0}}}} = S_n$

$\Rightarrow$ veamos que $\dfrac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = a_{n+1} + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\ddots}} = a_{n+1} + \dfrac{1}{S_n}$

Veo que:

$$a_{n+1} + \frac{1}{S_n} \underset{HI}{=} a_{n+1} + \frac{1}{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}} = a_{n+1} + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} = \frac{a_{n+1}\Delta_n + \Delta_{n-1}}{\Delta_n}$$

por lo calculado en la inducción anterior ⊛

$$\Delta_{n+1} = \Delta_{n-1} + a_{n+1}\Delta_n$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = \frac{a_{n+1}\Delta_n + \Delta_{n-1}}{\Delta_n} = a_{n+1} + \frac{1}{S_n}$$ que es lo que quería probar.

Ej 5:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Existen $C, D \in GL(3,\mathbb{Q})$ tales que $A = C.B.D$ si y solo si A y B son equivalentes. Para ver esto, estudio $rg A$ y $rg B$.

Escalono A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_1 \to F_3]{F_2 + F_1 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad rg A = 3$$

Escalono B:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - 3F_1 \to F_3]{F_2 - 2F_1 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{4} & \cancel{4} \end{pmatrix} \quad rg B = 2$$

$\Rightarrow$ A y B no son equivalentes y no existen $C, D \in GL(3,\mathbb{Q})$ tq $A = C.B.D$.

c) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \\ -2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$ veo si existe $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tq $adj B = A$

$Adj(B).B = det(B).Id$

Veo $det(A)$

$$det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \\ -2 & -4 & -7 \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1.(-2).3 = -6$$

Como $det A \neq 0$ veo que si existiera B entonces

$Adj(B).B = A.B = det(B) Id$

$B = det(B)\, A^{-1} \iff$

$det(B) = det(det(B).A^{-1}) \iff$

$det(B) = det(B)^3 \, det A^{-1} \iff$

$det A = det(B)^2 \iff$

pero $det A = -6 < 0 \Rightarrow$ no existe solución en $\mathbb{R}$ para $det A = -6 = det(B)^2$

$\Rightarrow \nexists B$.

$det B \neq 0$ pues si $det B = 0$
$A.B = det B\, Id$
$A.B = 0$
pero $B \neq 0$ ~~pues~~
pues ~~det B = 0~~
$adj(0) = 0 \neq A$
y $A \neq 0$ pues
$det A = -6$

b) Si $A \in K^{n\times n}$ y $rg A = 1 \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ la dimensión del subespacio generado por sus columnas es 1.

Tomo $v = (x_1, \dots, x_n)$ ~~[illegible]~~ un generador de dicho subespacio y $B = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$

Además, como $rg A = rg B$, son equivalentes, por lo tanto existen $C, D \in GL(n, \mathbb{Q})$ tq $A = C.B.D$

Tomando $\tilde{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\tilde{w}^t = (1\ 0 \cdots 0)$ ambos de K^n,

Se ve que $\tilde{v}.\tilde{w}^t = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 0 & & 0 \end{pmatrix} = B$

$$A = C.(\tilde{v}\,\tilde{w}^t).D = (C.\tilde{v}).(\tilde{w}^t D)$$

$C \in \mathbb{Q}^{n\times n}, \tilde{v} \in \mathbb{Q}^{n\times 1} \Rightarrow C\tilde{v} \in \mathbb{Q}^{n\times 1}$

Tomo $v = C.\tilde{v}$.

$D \in \mathbb{Q}^{n\times n}, \tilde{w}^t \in \mathbb{Q}^{1\times n} \Rightarrow \tilde{w}^t.D \in \mathbb{Q}^{1\times n}$

Tomo $w^t = D\,\tilde{w}^t \Rightarrow w = \tilde{w}.D^t$

ej 5 práctica 2